

Demostración didáctica del teorema de flujo tubular en la solución de ecuaciones diferenciales autónomas para modelar contaminantes ambientales

Didactic demonstration of the tubular flow theorem in the solution of autonomous differential equations to model environmental pollutants

Recibido: setiembre 12 del 2018 | Revisado: noviembre 21 del 2018 | Aceptado: diciembre 13 del 2018

LUZ E. HUANCHI MAMANI¹
HENRY E. NINA MENDOZA²
GEORGE ARGOTA PÉREZ³

RESUMEN

El propósito del estudio fue la demostración didáctica del teorema del flujo tubular en solución de ecuaciones diferenciales autónomas para modelar contaminantes ambientales. Se aplicó métodos de investigación con enfoque cuantitativo, teóricos como el analítico-sintético, así como el inductivo-deductivo. La relación establecida fue entre el campo vectorial, teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales autónomas, conjugación topológica y foliaciones. Se demostró la conjugación topológica entre un campo vectorial diferenciable y un campo constante no nulo. El teorema del flujo tubular demostró el comportamiento de las soluciones del sistema de trayectorias que conjeturan sobre la vecindad de un punto regular, es decir, un punto que no anula al campo vectorial el cual define la ecuación diferencial autónoma. La demostración didáctica sobre el teorema del flujo tubular proporcionó el comportamiento geométrico local de las órbitas de un campo vectorial en la vecindad de un punto regular.

Palabras clave: teorema del flujo tubular, ecuaciones diferenciales autónomas no lineales, sección transversal, punto regular, conjugación topológica, campo vectorial

ABSTRACT

The purpose of the study was the didactic demonstration of the tubular flow theorem in solving autonomous differential equations to model environmental pollutants. We applied research methods with a quantitative approach, theoretical as analytical-synthetic, as well as inductive-deductive. The relationship established was between the vector field, qualitative theory of autonomous differential equations, topological conjugation and foliations. The topological conjugation between a differentiable vector field and a nonzero constant field was demonstrated. The tubular flow theorem showed the behavior of the system solutions of trajectories that conjecture about the neighborhood of a regular point, that is, a point that does not cancel the vector field which defines the autonomous differential equation. The didactic demonstration of the tubular flow theorem gave the local geometric behavior of the orbits of a vector field in the vicinity of a regular point.

Key words: tubular flow theorem, nonlinear autonomous differential equations, cross section, regular point, topological conjugation, vector field

- 1 Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemática. Universidad Nacional del Altiplano (UNA). Puno, Perú. luzhuanchi@gmail.com
- 2 Programa de Doctorado. Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente. Escuela de Posgrado. Universidad Nacional del Altiplano (UNA). Puno, Perú. henryenm@hotmail.com
- 3 Centro de Investigaciones Avanzadas y Formación Superior en Educación, Salud y Medio Ambiente "AMTAWI". Puno, Perú. george.argota@gmail.com

© Los autores. Este artículo es publicado por la Revista Campus de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de San Martín de Porres. Este artículo se distribuye en los términos de la Licencia Creative Commons Atribución No-comercial – Compartir-Igual 4.0 Internacional (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), que permite el uso no comercial, distribución y reproducción en cualquier medio siempre que la obra original sea debidamente citada. Para uso comercial contactar a: revistacampus@usmp.pe.

<https://doi.org/10.24265/campus.2019.v24n27.08>

Introducción

Los enfoques ecotoxicológicos de predicción de riesgo permiten proporcionar información inestimable sobre la calidad de cualquier ecosistema acuático (Mouquet *et al.*, 2015; Petchey *et al.*, 2015) cobrando mayor importancia cuando algunos elementos pueden quedar retenidos; y luego, estar biodisponible (Hommen *et al.*, 2010; Brown *et al.*, 2017).

La información de datos sobre la calidad de los ecosistemas acuáticos permite su modelación (Yanagimoto, 2003) y de esta forma, establecer control de estrategias relacionada con la evolución de mecanismos en el tiempo (Ali, Hossain & Kumar, 2017).

Biswas, Rahman & Haque (2016) estudiaron los impactos potenciales del cambio climático global en Bangladesh mientras que Biswas (2014) desarrolló un modelo matemático para describir la transmisión del virus Nipah. Por su parte, Schminder & Gårdhagen (2018) han aplicado la modelación matemática para predecir el ambiente térmico en cabinas de operación de aeronaves en tierra y vuelo.

Sin embargo, el entendimiento de la movilidad ambiental de un punto de referencia a otro ha sido interpretado mediante análisis de significación estadística aunque, determinados teoremas con ecuaciones diferenciales podrían justificar dicho trayecto.

Sotomayor (1979), Gonzáles (2001) y Benazic (2007) mencionan que todo sistema autónomo $X_0 = f(x)$, existe un cambio de coordenadas local en un entorno de cualquier punto regular que lo

transforma en el sistema, pudiendo ser de la siguiente forma:

Sea todo sistema autónomo $X_0 = f(x)$, existe un cambio de coordenadas local en un entorno de cualquier punto regular que lo transforma en el sistema, pudiendo ser de la siguiente forma:

$$\begin{cases} f_1' = 1 \\ f_2' = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n' = 0 \end{cases}$$

En particular, las intersecciones de las órbitas con dicho entorno son difeomorfismos a una colección de segmentos paralelos. Para reconocer de forma inicial la modelación del plomo biodisponible (movilidad y persistencia entre las estaciones), hubo que orientarse en las ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio \mathbb{R}^n donde se planteó, el conocimiento cualitativo satisfactorio del comportamiento geométrico local de las órbitas de un campo vectorial diferenciable en la vecindad de un punto regular $f(x) \neq 0$. Dado el campo vectorial continuo f , el problema valor inicial asociado es:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Con el campo vectorial $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo constante $f_1(x) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ o constante el problema valor inicial asociado se expresa como:

$$\begin{cases} x' = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ x(0) = p \end{cases}$$

Se obtiene una conjugación topológica entre campos f y f_1 .

En el campo vectorial, sea un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se menciona que: f es campo vectorial a una aplicación (Benazic, 2007; García, 2007):

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\bar{x} \rightarrow f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$$

• *dónde:*

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $i = 1, \dots, m$ son llamadas funciones del campo f .

Sea un conjunto abierto: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un campo vectorial $f \in C^k(U)$

• *dónde*

$k \geq 1$, es una función:

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} \rightarrow f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$$

La fórmula anterior satisface las siguientes condiciones que representan la Figura 1:

$f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^k en U , $\forall i \leq n$ (f_i son llamadas funciones coordenadas del campo f). Si $x \in U$, entonces $f(x) \in \mathbb{R}^n$, es un vector donde el punto de aplicación es, x .

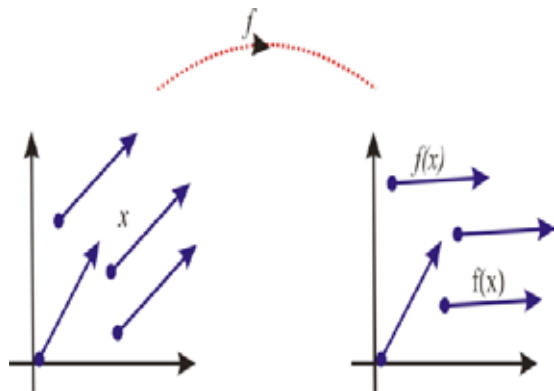


Figura 1. Campo vectorial

La figura describe un campo vectorial que asocia a cada $x \in U$, determinada $f(x) \in \mathbb{R}^n$ de modo que, la forma de visualizar un campo vectorial es seleccionar la $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Posteriormente, es requerido localizar el punto $f(x) \in \mathbb{R}^n$ donde es de interés graficar el conjunto imagen del campo vectorial (Figura 2), la cual se obtiene

mediante la unión de una flecha que inicia en x y termina en $f(x)$.

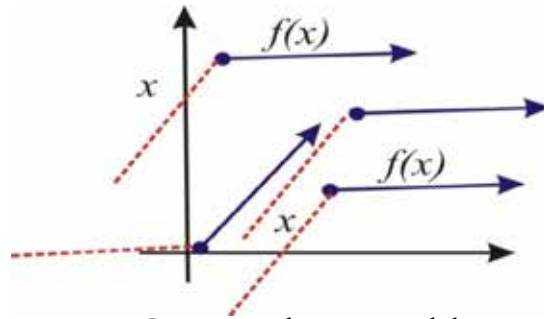


Figura 2. Conjunto de imagen del campo vectorial

Asimismo, sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el flujo asociado al campo lineal A (o equivalentemente a la ecuación diferencial: $x' = Ax$), entonces la misma puede estar dada por: $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se tiene $\varphi_A(t, x) = e^{tA}x$. De igual modo, sea el abierto: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, la aplicación $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 se dice que, es flujo asociado (Figura 3a y 3b), si:

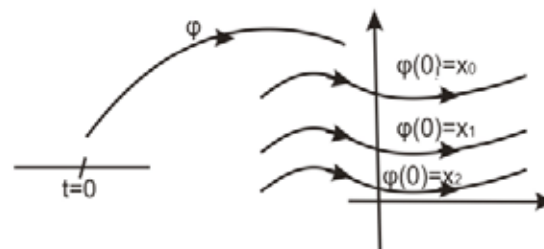


Figura 3a. Flujo asociado cuando: $\varphi(0, x) = x$

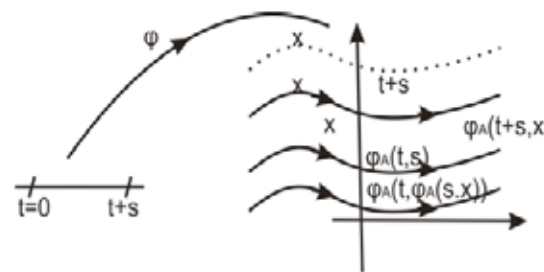


Figura 3b. Flujo asociado cuando: $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$

Sea el abierto: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k , $k > 0$. Dado el problema de valor inicial P.V.I.

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Cuya solución máxima es: $\varphi_x : I_x \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$. De igual modo, sean los conjuntos abiertos:

$$U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n, f_1 \in C^{k_1}(U_1), f_2 \in C^{k_2}(U_2)$$

Dónde: $\varphi_x : D_1 \rightarrow U_1, \varphi_y : D_2 \rightarrow U_2$, los flujos generados por los campos f_1 y f_2 , se dice que: f_1 y f_2 son topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo ($h: U_1 \rightarrow U_2$), llamado conjugado topológica, tal que: $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$ para todo $(t,p) \in D_1$

Se dice que: f_1 y f_2 son C^r conjugados (donde $r \leq \min \{k_1, k_2\}$) si existen un difeomorfismo:

$h: U_1 \rightarrow U_2$ de clase C^r llamado conjugación de clase C^r , tal que: $h'(p) = f_2(h(p))$ para todo: $t \in D_1$

Se analizó el teorema de flujo tubular proveyendo de definiciones, lemas, proposiciones donde, a partir de cambios de coordenadas en una vecindad sobre un punto que no es singularidad (punto regular), cualitativamente las soluciones son equivalentes según lo planteado por Palis (1978), Sotomayor (1979), Doering (2005) y Benazic (2007) para una familia de líneas horizontales en un plano.

Asimismo, el teorema del flujo tubular fue analizado para la solución de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales considerando lo siguiente,

Sean f_1 y f_2 definidos por:

$$f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x,y) \rightarrow f_1(x,y) = (x, -y)$$

$$f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x,y) \rightarrow f_2(x,y) = (x, -4y^3, -y)$$

Claramente: $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sea:

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x,y) = h(x,y) = (x + y^3, y)$$

Entonces: h , es una conjugación de clase C^∞ entre f_1, f_2 . Solución será valorar que: φ_1 y φ_2 asociados a los campos f_1 y f_2 , respectivamente ($f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)

$$(x,y) \rightarrow f_1(x,y) = (x, -y)$$

$$f_1^1(x,y) = x$$

$$dx / dt = x$$

$$\int dx / x = \int dt$$

$$\ln x = t + k_1$$

$$x = e^t C_1$$

$$\varphi_1(x,y) = e^t C_1$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow f_1(x,y) = (x, -y)$$

$$f_1^2(x,y) = -y$$

$$dx / dt = -y$$

$$\int dx / y = - \int dt$$

$$\ln y = - (t + k_2)$$

$$y = e^{-t} C_2$$

$$\varphi_2(x,y) = e^{-t} C_2$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow f_2(x,y) = (x - 4y^3, -y)$$

$$f_1^2(x,y) = x - 4y^3 \dots (1)$$

Reemplazando: en (1)

$$dx / dt = x - 4 (e^{-t} C_2)^3 \dots (**)$$

$$f_2^2(x,y) = -y$$

$$dx / dt = -y$$

$$\int dx / y = - \int dt$$

$$\ln y = - (t + k_4)$$

$$y = e^{-t} C_4$$

$$\varphi_2(x,y) = e^{-t} C_4$$

Desarrollando la solución general: $X_g = X_c + X_p$, se obtiene complementaria: X_c de (**)

$$dx / dt = x$$

$$\int dx / x = \int dt$$

$$\ln x = t + k_3$$

$$x = e^{-t} C_3$$

$$\varphi_1(x, y) = e^{-t} C_3$$

Resolviendo solución particular: X_p donde $x = ue^t \dots$ (2) se tiene: $X_p' = u'e^t + ue^t$ reemplazando en (**):

$$u'e^t + ue^t - ue^t = -4e^{-3t} C_4^3$$

$$u = e^{-4t} C_4^3$$

Reemplazando en (2): $x = ue^t$, la solución particular: $x = e^{-4t}e^t C_4^3 = u = e^{-3t} C_4^3$ donde reemplazamos en la solución general: $X_g = e^t C_3 + e^{-3t} C_4^3$

$$\varphi_2(x, y) = ((e^t C_3 + e^{-3t} C_4^3) e^t C_3$$

$$\varphi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, x, y) \rightarrow \varphi_1(t, x, y) = (xe^t, ye^t)$$

$$\varphi_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, x, y) \rightarrow \varphi_2(t, x, y) = (xe^t + y^3 e^{3t}, ye^t)$$

La Figura 4 muestra la interpretación geométrica de conjugaciones entre campo f_1 y f_2 del ejemplo aplicado el comportamiento que existe.

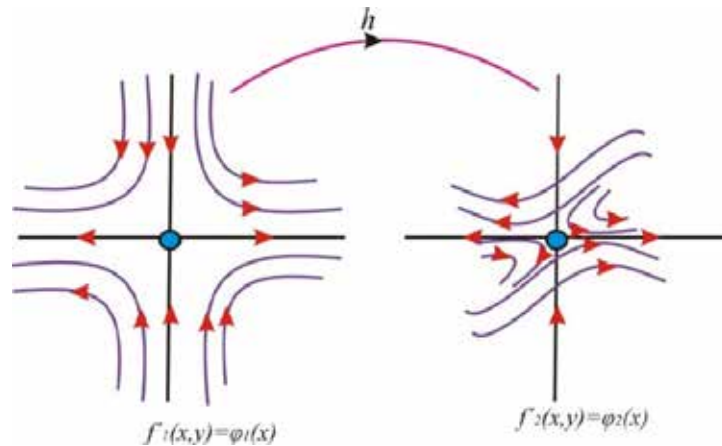


Figura 4. Conjugación entre el campo f_1 y f_2

Luego,

$$h(\varphi_1(t, x, y) = h(xe^t, ye^t)$$

$$= (xe^t + y^3 e^{-3t}, ye^t)$$

Además,

$$\varphi_2(t, h(x, y)) = \varphi_2(t, x + y^3, y)$$

$$= (xe^t + y^3 e^{-3t}, ye^t)$$

Se concluye que:

$$h(\varphi_1(t, x, y)) = \varphi_2(t, h(x, y))$$

Definición: Dado un campo vectorial continuo definido en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, la ecuación diferencial de tipo ordinaria autónoma es:

$$\bar{x}' = f(\bar{x}) \rightarrow dx / dt = f(\bar{x})$$

Entonces: $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$, donde $i = 1, 2, \dots, n$

$$f_i: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \rightarrow f_i(\bar{x})$$

$$\bar{x}_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{x}_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pero: f , no depende explícitamente del parámetro t

- Ecuación diferencial no autónoma

Se puede decir que, una ecuación diferencial ordinaria es, *no autónoma* sí, depende explícitamente del parámetro t . Significa que, $g(t, x)$ en lo cual, la ecuación diferencial ordinaria es de la siguiente forma:

$$x' = g(t, x)$$

- No es autónoma cuando $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (es un campo vectorial)

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es, no autónoma sí, se puede expresar en la forma:

$$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}' = f(t, \bar{x})$$

$$f_i: D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f_i: (t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{x}'_1(t) = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{x}'_2(t) = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\bar{x}'_n(t) = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde t : es una variable independiente que denotara al tiempo

x_i : variables que dependen de t y que adquieren valores reales

f_i : son funciones reales definidas en un subconjunto D de \mathbb{R}^{n+1}

El propósito del estudio fue la demostración didáctica del teorema del flujo tubular en solución de ecuaciones diferenciales autónomas.

Método

Se analizó el teorema de flujo tubular proveyendo de definiciones, lemas, proposiciones donde a partir de cambios de coordenadas en una vecindad sobre un punto que no es singularidad (punto regular), cualitativamente las soluciones son equivalentes según lo planteado por Palis (1978), Sotomayor (1979), Doering (2005) y Benazic (2007) para una familia de líneas horizontales en un plano.

Resultados y discusión

Previo a demostrar el teorema del flujo tubular se utilizaron resultados obtenidos, los cuales fueron referidos tanto a la definición de punto regular, homeomorfismo, difeomorfismo, inmersión, sección transversal, proposición como del teorema de la función inversa, donde se utilizaron para reducir el teorema del flujo tubular de una vecindad arbitraria. Como p es un punto regular de un campo f , entonces en una vecindad suficientemente pequeña de p , se puede direccionar las orbitas de f .

Seguidamente, el símbolo $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ denota al subespacio vectorial de \mathbb{R}^m generado por los vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

- Definición: Punto regular

Se dice que: $p \in U f: \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
Un campo vectorial, es un punto regular del campo f si $f(p) = \vec{0}$

- Definición: Homeomorfismo

Un homeomorfismo del conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sobre el conjunto: $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, es una bi-sección continua de $f: X \rightarrow Y$, cuya inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ (igualmente es continua) (Lages, 2004).

- Definición: Difeomorfismo

Sean: X, Y conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $f: X \rightarrow Y$ es un difeomorfismo sí, f es biyectiva derivable y f^{-1} también es derivable (Lages, 2004).

- Definición: Inmersión

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en U , se dice que: f es una inmersión de U en \mathbb{R}^n sí y solo si, $f'(x) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ es inyectiva, $\forall x \in U$ (Palis, 1978).

- Definición: Sección Transversal

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $f \in C^k(U)$ y $p \in U$, una sección transversal local de clase C^r al campo f en el punto p , es una función $\psi: V^{n-1} \rightarrow U$ de clase C^r que satisface las siguientes propiedades: ¹

1. ψ : es una inmersión de V^{n-1} en U
2. $\psi: V^{n-1} \rightarrow \psi: [V^{n-1}] = \Sigma$ (es un homeomorfismo)
3. $p \in \Sigma$
4. $\psi'(x) [R^{n-1}] \langle f(\psi(x)) \rangle = R^n_{(x)}$.
Para todo $x \in V^{n-1}$

- Proposición:

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $f \in C^k(U)$ y $p \in U$, es un punto regular de f , entonces una sección transversal local ψ de clase C^∞ al campo f en el punto p tal que $\psi(0) = p$

- Teorema de la función inversa:

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ función de clase C^k tal que, $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^n)$ donde $a \in U$, entonces existen $V_a \subseteq U$ y $W_f(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto con, $a \in V_a$, $f(a) \in W_f(a)$ tales que, $f|_{V_a}$ es,

¹ $\psi = \psi: V^{n-1} \rightarrow \psi[V^{n-1}]$ es un homeomorfismo

un difeomorfismo de clase C^k (Lages, 2006; Cortés & Aganis, 2012).

La Figura 5 muestra la interpretación geométrica del teorema de la función inversa donde se obtiene que, para a en una vecindad $V_a \subseteq U$ del origen, se puede invertir f a f^{-1} . El teorema de la función inversa afirma que, si f es de clase $C^k \geq 0$, con la matriz jacobiano es diferente de cero, entonces f , es localmente un difeomorfismo.

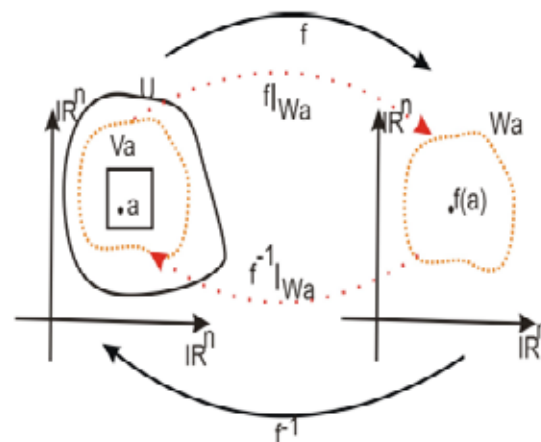


Figura 5. Geométricamente teorema de la función inversa

Para la discusión sobre el teorema del flujo tubular puede indicarse lo siguiente:

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^k(U)$ y $p \in U$ un punto regular, entonces dada una sección transversal local $\psi: V^1 \rightarrow \Sigma$ de clase C^∞ a en p con $0 \in V^1$ y $\psi(0) = p$, entonces existe una vecindad W_p de p en el conjunto abierto U y un difeomorfismo de clase C^r .

$$h: W_p \rightarrow I_\epsilon(0) \times B$$

Dónde: $I_\epsilon(0)$ es un intervalo maximal, $\epsilon > 0$ y B , es una bola abierta en \mathbb{R}^{n-1} centrada en el origen (Fernández, 2010-2011):

$$h[\Sigma \cap W_p] = \{0\} \times B$$

h es, una conjugación de clase C^k entre $f|_{W_p}$ y el campo constante:

$f_1: I_\alpha(0) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_1 = (1, 0, \dots, 0)$
 La Figura 6 muestra la interpretación geométrica del flujo tubular.

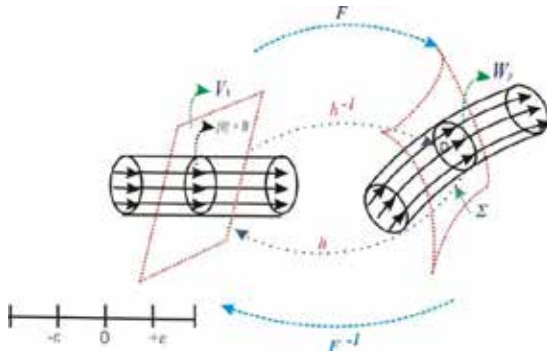


Figura 6. Flujo tubular

Para la demostración y análisis del teorema de flujo tubular se plantea lo siguiente:

Sea, $\varphi: D_f \rightarrow U$, el flujo de f se denota por: $D_f = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times V_1; (t, \psi(u)) \in D\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$

Luego se define la función, donde f es de clase C^k :

$$f: D_f \rightarrow U$$

$$(t, u) \rightarrow f(t, u) = \varphi(t, \psi(u))$$

La Figura 7 muestra geoméricamente la función f , transforma líneas horizontales en orbitas del campo f que en el instante 0 pasan por sección transversal.

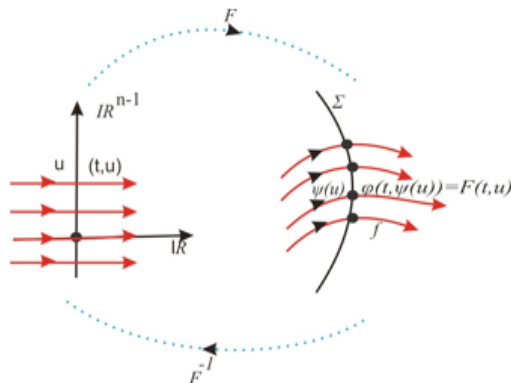


Figura 7. Transformación del flujo tubular

Sea $f(0, \bar{0}) = \varphi(0, p) = p$, se probará que f es un difeomorfismo local en: $(0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$

Por el teorema de la función inversa sería suficiente probar que: $F'(0, \bar{0})$ es un isomorfismo.

Usando las notaciones del análisis en varias variables reales se tiene:

$$F'(0, \bar{0}) = [\partial f / \partial t(0, \bar{0}), \partial f / \partial u_1(0, \bar{0}), \dots, \partial f / \partial u_{n-1}(0, \bar{0})] \in \mathbb{R}^{n \times n} \dots (*)$$

- Se obtiene I:

$$\partial f / \partial t(t, \bar{u}) = \partial f / \partial t(t, \psi(\bar{u})) = \partial \varphi / \partial t(t, \psi_2(\bar{u}), \dots, t, \psi_n(\bar{u}))$$

$$\partial f / \partial t(t, \bar{u}) = \partial f / \partial t(t, \psi(\bar{u})) = \partial \varphi / \partial t(t, \psi_2(\bar{u}), t, \psi_2(\bar{u}))$$

$$\partial f / \partial t(0, \bar{0}), = \partial \varphi / \partial t(t, \psi_1(\bar{0}), t, \psi_2(0), \dots, t, \psi_n(0))$$

$$\partial f / \partial t(0, \bar{0}), = \partial \varphi / \partial t(t, \psi(\bar{0}))$$

$$\partial f / \partial t(0, \bar{0}), = \partial \varphi / \partial t(0, p)$$

$$\partial f / \partial t(0, \bar{0}), = f(\psi(0, p)) = f(p) \neq 0$$

- Se obtiene II:

$$\partial f / \partial u_1(t, \bar{u}), = \partial f / \partial u_{n-1} = \partial f / \partial u_j(t, \bar{u})$$

$$\partial f / \partial u_j(t, \psi_1(\bar{u}), t, \psi_2(\bar{u}), \dots, t, \psi_n(\bar{u}))$$

$$\partial f / \partial u_j(t, \bar{u}) = \partial \varphi / \partial u_j(t, \psi_1(\bar{u}), t, \psi_2(\bar{u}), \dots, t, \psi_n(\bar{u}))$$

$$\partial f / \partial u_j(0, \bar{0}) = \partial \varphi / \partial x_1(0, p). \partial x_1 / \partial u_j(\bar{0}) + \partial \varphi / \partial x_2(0, p). \partial x_2 / \partial u_j(\bar{0}) + \dots \partial \varphi / \partial x_n(0, p). \partial x_n / \partial u_j(\bar{0}) \dots (**)$$

- Pero, $\varphi(0, \bar{x}) = \bar{x}$

$$\varphi(0, \bar{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\varphi(0, \bar{x}) = (x_1 e_1 + x_2 e_2, \dots, x_i e_i + x_n e_n)$$

$$\partial \varphi / \partial x_i(0, \bar{x}) = \partial / \partial x_i (x_1 e_1 + x_2 e_2, \dots, x_i e_i + x_n e_n)$$

$$\partial \varphi / \partial x_i(0, \bar{x}) = \partial / \partial x_i (x_1 e_1 + \partial / \partial x_i (x_2 e_2) + \dots + \partial / \partial x_i (x_i e_i) + \dots + \partial / \partial x_i (x_n e_n))$$

$$\partial\varphi / \partial x_i (0, \bar{x}) = \bar{0} + \bar{0} + \dots \bar{e}_i + \dots + \bar{0}$$

- Se reduce que, $\partial\varphi / \partial x_i (0, \bar{x}) = e_i$, implica que, $\partial\varphi / \partial x_i (0, \bar{0}) = e_i$; $\forall 1 \leq i \leq n-1$ reemplazando en (**)

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = \partial\psi_1 / \partial u_j (\bar{0}) e_1 + \partial\psi_2 / \partial u_j (\bar{0}) e_2 + \dots + \partial\psi_n / \partial u_j (\bar{0}) e_n$$

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = \partial\psi_1 / \partial u_j (\bar{0}) (1, 0, \dots, 0) + \partial\psi_2 / \partial u_j (\bar{0}) (0, 1, \dots, 0) + \dots + \partial\psi_n / \partial u_j (\bar{0}) (0, 0, \dots, 1)$$

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = (\partial\psi_1 / \partial u_j (\bar{0}) (0, 0, \dots, 0) + \partial\psi_2 / \partial u_j (\bar{0}) (0, 1, \dots, 0) + \dots + \partial\psi_n / \partial u_j (\bar{0}) (0, 0, \dots, 1))$$

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = \partial\psi_1 / \partial u_j (\bar{0}), \partial\psi_2 / \partial u_j (\bar{0}), \dots, \partial\psi_n / \partial u_j (\bar{0})$$

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = \partial\psi_1 / \partial u_j (\bar{0})$$

$$\partial f / \partial u_j (0, \bar{0}) = \psi'(\bar{0}) (e_j), \text{ donde } 1 \leq i \leq n-1$$

- Luego reemplazando en (*)

$$F'(0, \bar{0}) = [f(p), \psi'(\bar{0})_1, \dots, \psi'(\bar{0})_{n-1}]$$

Como $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n): V \rightarrow \Sigma$, es una sección transversal, se cumple:

$$[\psi'(\bar{0}) [R_0^{n-1}] \oplus \langle f(p) \rangle = R^n. \text{ Luego, } F'(0, \bar{0}) \in GL(R^n)$$

Por el teorema de la función inversa, existe: $\epsilon = \epsilon(p) > 0$, existe $B \subseteq R^{n-1}$ bola abierta centrada en $0 \in R^{n-1}$ existe W_p vecindad abierta de p en U , tal que: $F|_{I_\epsilon(0) \times B} : I_\epsilon(0) \times B \rightarrow W_p$, es un difeomorfismo de clase C^k .

- Se considera:

$h = (F|_{I_\epsilon(0) \times B})^{-1}: W_p \rightarrow I_\epsilon(0) \times B$ como $(0, u) \in I_\epsilon(0) \times B$; tal que:

$$F'(0, u) = \varphi(0, \psi(u)) = \psi(u) \in \Sigma \cap W_p.$$

En efecto, $h[\Sigma \cap W_p] = \{0\} \times B$

i) c, si $(0, u) \in I_\epsilon(0) \times B$, entonces $F'(0, u) = \varphi(0, \psi(u)) = \psi(u) \in \Sigma \dots (1)$. En otro sentido,

$M = (\{0\} \times \{u/u \in B\}) \cap W_p$ porque es un difeomorfismo $F(M) \cap W_p \dots (2)$

De (1) y (2) se concluye que, $(0, u) \in \{0\} \times B$ por lo tanto, $h[\Sigma \cap W_p] = \{0\} \times B$
 $h = [\{0\} \times B] \cap W_p$. Se puede concluir que, $h = [\Sigma \cap W_p] = \{0\} \times B$

- Finalmente, para $(t, u) \in I_\epsilon(0) \times B$; se tiene:

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = \partial f / \partial t(t, u) \cdot (1) + \partial f / \partial t(t, u) \cdot (0) + \dots + \partial f / \partial t(t, u) \cdot (0)$$

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = \partial f / \partial t(t, u)$$

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = \partial\varphi / \partial t(t, \psi(u))$$

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = f(\varphi(t, \psi(u)))$$

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = f(F(t, u))$$

$$(h^{-1})'(t, u) f_1(t, u) = f(h^{-1}(t, u))$$

$f(h^{-1}(t, u))$, luego h^{-1} es una C^k – conjugada entre f_1 y f ; h es una C^k – conjugada entre $f|_{W_p}$ y f_1

La Figura 8, muestra la interpretación geométrica de conjugación topológica local entre campos de Y e f , de $f(h^{-1}(t, u))$, luego h^{-1} es una C^k – conjugada entre Y e f ; h es una C^k – conjugada entre $f|_{W_p}$ e Y .

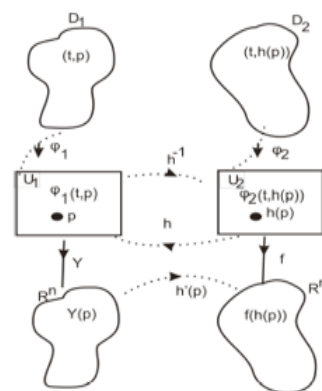


Figura 8. Conjugación topológica local entre campos de Y e f .

Se concluyó, que la demostración del teorema del flujo tubular para el comportamiento de las trayectorias de las ecuaciones diferenciales autónomas no lineales a lineales, ha probado ser muy útil para determinar el comportamiento de los flujos asociados a campos vectoriales, que viene a ser una familia de trayectorias que analiza el comportamiento geométrico local de las orbitas de un campo vectorial en la vecindad de un punto regular, pero no describe completamente el comportamiento topológico global de las orbitas de un flujo asociado al campo vectorial sino, lo que hace es conjugar entre campo constante y campo vectorial .

En cuanto a mostrar las conjugaciones del ejemplo entre los dos campos, se

percibió que el teorema del flujo tubular, ofrece ideas acerca del comportamiento de las trayectorias en puntos regulares; sin embargo, el teorema es aplicable siempre que se conozca las soluciones de una ecuación diferencial no lineal, teniendo en cuenta que se verifica las condiciones de homeomorfismo y difeomorfismo.

Las bibliografías consultadas no indican estudios aplicados a la tipología de la demostración implícita del teorema del flujo tubular, pues los ejemplos analizados en el programa Wolfram Matemática, arrojaron resultados considerados como relevantes, los cuales pueden ser utilizados para futuros estudios con la finalidad de corroborar los resultados obtenidos o para su aplicación en áreas afines.

Referencias

- Ali, B.H., Hossain, R. & Kumar, M.M. (2017). Mathematical Modeling Applied to Sustainable Management of Marine Resources. *Procedia Engineering*; 194, 337–344. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.08.154>
- Ali, H., Khan, E. & Sajad, M.A. (2013). Phytoremediation of heavy metals – concepts and applications. *Chemosphere*; 91, 869–881. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2013.01.075>
- Benazic, T.R. (2007). Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Editorial. Universidad Nacional de Ingeniería. <https://www.yumpu.com/es/document/view/143/...ordinarias-sociedad>
- Biswas, M.H.A. (2014). Optimal control of Nipal virus (NIV) infections: A Bangladesh scenario. *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*; 12(1), 77–104.
- Biswas, M.H.A., Rahman, T. & Haque, N. (2016). Modeling the potential impacts of global climate change in Bangladesh: An Optimal Control Approach. *J Fundam Appl Sci*; 8, 1–19. <http://dx.doi.org/10.4314/jfas.v8i1.1>
- Brown, A.R., Whale, G., Jackson, M., Marshall, S. & Hamer M. *et al.* (2017). Towards the definition of specific protection goals for the environmental risk assessment of chemicals: lessons learned from a review of wider environmental legislation. *Integr Environ Assess Manag*; 13, 17–37. <https://doi.org/10.1002/ieam.1797>
- Cortés, R.J.J. & Aganis, J.M.L. (2012). Aplicación inversa del método de Krylov para obtener una matriz de

- orden tres. *Revista Ingeniería Investigación y Tecnología*; 23(2), 169–174. <http://www.scielo.org.mx/pdf>
- Doering, C.I. & Lopes, O.A. (2005). Equações Diferenciais Ordinárias. Capítulo: 4.7. Editorial IMPA. Pp. 421 http://wwwimpa.br/opencms/pt/publicacoes/colecao_matematica_universitaria/livroequacoes_diferenciais_ordinarias/livro_equacoes_diferenciais_ordinarias_autores
- Fernández, G.M. (2010–2011). Ampliación de ecuaciones diferenciales. Capítulo 4: Soluciones periódicas en sistemas autónomos planos, 4.2 teorema del flujo tubular, 67–71. <http://matematicas.unex.es/~ghierro/aed-2010-11/aediferenciales.pdf>
- García, A. (2007). Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), Unidad Iztapalapa – México. Capítulo 1: Primeros ejemplos y definiciones, 1.2 Definición de una ecuación diferencial, 3–11. <http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos>
- González, B.M. (2001). Conjugación topológica de difeomorfismos. *Revista PESQUIMAT*; 4(1), 13–29. <http://sisbib.unmsm.edu.pe/bib-virtualdata>
- Hommen U., Baveco J.M., Galic N. & Van den Brink P.J. (2010). Potential application of ecological models in the European environmental risk assessment of chemicals. I: review of protection goals in EU directives and regulations. *Integr Environ Assess Manag*; 6, 325–337. <https://doi.org/10.1002/ieam.69>
- Lages, L.E. (2004). Análise real. Vol 2. Capítulo: 6.1. Editorial IMPA. Pp. 202. <http://www.estantevirtual.com.br/dasraizes>
- Lages, L.E. (2006). Curso de análise. Vol 2. Capítulo: 5.8. Editorial IMPA. Pp. 547. <http://www.estantevirtual.com.br/livrariadourados>
- Moreno, R.M. (2011). Ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^2 . Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. Capítulo: 3. Puntos singulares y regulares, 3.2. Puntos regulares y rectificación del flujo, 19–21. <http://www.cimat.mx/~mmoreno/notes/EDD2.pdf>
- Mouquet, N., Lagadeuc, Y., Devictor, V., Doyen, L., Duputié, A. & *et al.* (2015). Predictive ecology in a changing world. *J Appl Ecol*; 52, 1293–1310. <https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1365-2664.12482>
- Palis Jr, W. J. (1978). Introdução aos sistemas dinâmicos. Capítulo: 1.4 y 2.1. Editorial. Projeto Euclides. Pp. 296. http://wwwimpa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10_CBM_75_08.pdf
- Petchey, O.L., Pontarp, M., Massie, T.M., Kéfi, S., Ozgul, A. & *et al.* (2015). The ecological forecast horizon, and examples of its uses and determinants. *Ecol Lett*; 18, 597–611. <https://doi.org/10.1111/ele.12443>
- Schminder, J. & Gårdhagen, R. (2018). A generic simulation model for prediction of thermal conditions

and human performance in cockpits. *Building and Environment*; <https://doi.10.1016/j.buildenv.2018.06.055>

Sotomayor, T.J. (1979). Licoes de equacoes diferenciais ordinarias. Capítulo: 6.4.8 Editorial Projeto Euclides. Pp. 327. <https://es.scribd.com/document/219192941/Licoes-de-Equacoes-Diferenciais-Ordin>

Yanagimoto, A. (2003). Environmental Problems and Mathematical Modelling. 1–8. <https://doi.org/10.1533/9780857099549.2.53>